*ANTÓNIO SÉRGIO*

# *Réplica sem severidade a um severo amigo*

*I beseech you, in the bowels of Christ — believe it possible you may be mistaken I*

OLIVEIROS CROMWELL

A intitulada «Resposta a uma crítica», com que Bento de Jesus Caraça me honrou no último número desta revista, dá-me bom ensejo para me explicar outra vez acerca dos assuntos que estão em causa. O ilustre professor de matemática divide a sua «Resposta» em seis parágrafos; em outros tantos dividirei esta réplica, correspondentes aos seis pontos do seu artigo.

1. No passo de Jesus Caraça que tomei para origem da minha Nota, falava-se de «forma» e também de Platão: e por isso supus que era à «forma» platónica que se referia o trecho donde decidi partir. Explica-se-me agora que não era assim, porquanto a «forma» no sentido platónico a usa ele escrever com inicial maiúscula: o que ali não sucede. Dizendo «forma», portanto, queria ele referir-se ao que eu chamo «figura», àquilo a que Platão daria o nome de «esquema». Não desaparece, no entanto, por esse facto (mas agora independendo da palavra «forma») a diferença de doutrina que entre nós existe, sobre a interpretação do espírito da filosofia platónica e da relação do platonismo com a Geometria Analítica e com o carácter da ciência considerada em geral.

Falando, com efeito, do primado do número sobre a figura, assim reflexionou Jesus Caraça: «Se tal primado existe, tratar-se-á então de uma explicação quantitativa da forma, principalmente o contrário do que queria o sistema de Platão, como vimos pelas citações do *Timeu*. Ora é de facto isso que a Geometria Analítica permite fazer».

Se, porém, formos à página sobre o *Timeu* a que se refere este trecho do Professor Caraça (v. *Conceitos fundamentais da matemática,* vol. II, pág. 108-110), que encontramos nós? — Que Platão fantasiou uma explicação cosmológica dos elementos componentes da matéria e das suas respectivas transformações, por meio de figuras de geometria; que salientou para isso o triângulo rectângulo entre cujos catetos $b$ e $c$ existe a relação $b^2 = 3\ c^2$ (atenção aqui, porque o caso importa: note-se a passagem para a relação aritmética, que está na fonte da escolha de tais triângulos); que sonhou que os quatro elementos físicos tinham nos triângulos a sua origem; e que por fim declara (é Jesus Caraça quem transcreve o filósofo; porém os itálicos são meus, sou eu que sublinho):

«Todas estas figuras convém concebê-las tão pequenas que em cada género nenhuma possa ser vista individualmente. Pelo contrário, quando se agrupam, as massas que formam são visíveis. *E, pelo que toca às relações numéricas que dizem respeito ao número, aos seus movimentos e outras propriedades,* deve considerar-se sempre que o Deus, na medida em que o ser da necessidade se deixava espontâneamente persuadir, as realizou por toda a parte de maneira exacta e assim *harmonizou matemàticamente* os elementos».

E, disto, Bento Jesus Caraça conclui o seguinte:

«Vê-se, portanto, que o ideal da ordenação matemática não desapareceu, ele continua a palpitar; simplesmente, além do elemento místico que vemos nesta última passagem, a ordenação matemática está subordinada às relações de figuras geométricas — a aritmética cedeu o passo à geometria, a figura ascendeu ao primeiro plano».

Ora, será esta a justa conclusão do texto? Ou deve concluir-se precisamente o oposto?

Como se sabe, além de um pensador da maior grandeza, Platão era artista no mais fundo da alma, e exprime-se com frequência através de contos, de apólogos, de devaneios míticos, de simbolizações. O filósofo (e Caraça sente-o) seria logo o primeiro a não tomar a sério a *triangularidade* da cosmologia com que nos aí regala. Como o disse Rivaud (no prefácio que antepôs à sua tradução do *Timeu,* na *Collection des Universités de France,* pág. 11) «*le Timée* est une histoire, et même un roman ou une fable»: e o que nessa fábula ao autor importa não é nada a cosmologia que lhe serviu de introito, mas a parte da obra em que se refere ao Homem. Só releva pois (a mim e a Caraça) o *espírito* da fábula que no *Timeu* se topa; o seu carácter, inspiração, ou rumo; o pendor intelectual que se manifesta ali. Ora bem. E qual é esse espírito? Será ele, porventura, o que nos diz Caraça? Por mim, suponho que será exactamente o contrário, quer dizer: que é o primado do número, e não o de figura, o que se nos dá no *Timeu;* que não é nada nele a ordenação matemática que se encontra subordinada à disposição das figuras (Caraça não diz a «disposição» das figuras, como digo aqui, mas «relações» de figuras, o que o contraria a ele próprio), senão que ao invés é a disposição das figuras que se encontra subordinada às relações numéricas: em primeiro lugar, pelo critério usado para a selecção dos triângulos, o qual é precisamente uma relação numérica ($b^2 = 3\ c^2$); e em segundo, porque aquilo que o Demiurgo se propõe fazer (isto é: a sua ideia directriz na ordenação do Universo) não é a ordem sensível de uma disposição de figuras, mas «as *relações numéricas* que dizem respeito ao seu número, aos seus movimentos e outras propriedades», — «e assim harmonizou matemàticamente os elementos»... Que pensarão os leitores? Não será como eu digo, isto é, perfeitamente o contrário do que diz Caraça? Cada um que releia atentamente a página, e que decida por si.

E faça-se também, já agora, uma pequenina experiência. Onde se encontra «figuras», logo ao abrir do passo, substitua-se por «protões», «electrões», etc.: e cogite-se se o texto, uma vez feita a troca, não exprime a primor a nossa Física de hoje; e se um James Jeans, por exemplo, se não sentiria tentado a subscrever tal prosa.

2. A seguir, no seu parágrafo 2, decide perguntar-me o Professor Caraça porque digo eu que «afirmar a ideia do primado do número significa precisamente repetir Platão». Creio que se vê isso no exemplo anterior, e por feição claríssima; o melhor de tudo, todavia, será Bento Caraça reler o quinto, o sexto e o sétimo livros da *República* (do quinto livro ùnicamente o fim), onde a teoria-do-conhecimento de Platão se encontra finalmente tirada a limpo, sem devaneios artísticos a transviar o leitor e sem os vários defeitos de expressão verbal que se topam nos diálogos mais antigos, — assim como no *Faidon,* por exemplo, a que Bento Caraça insistentemente se apega, interpretando-o de maneira que me parece errónea. É de todos conhecido que a tendência pla-

tónica consiste em construir o sabor científico sobre a base de inteligíveis cada vez mais puros, afastados em grau cada vez mais forte das intuições primitivas, originais: de onde logo se poderia coligir *a priori* que lhe seria de todo uma orientação repulsiva a de admitir na ciência o primado da figura (chegada ao sensível, mais afim das imagens), sobre a relação numérica, que comparada com ela é um inteligível puro.

Parece-me que tudo isto são coisas óbvias, de clareza infinita; mas é reler a *República,* e todas as dúvidas se esvairão de pronto. Estudem-se sem preconceito essas poucas páginas, procurando atingir-lhes o verdadeiro espírito; e no entanto, recorto ao acaso este pequenino passo, e rogo que se medite onde vai ele parar, pensando-se ao mesmo tempo na Geometria Analítica:

> «Saberás pois que se servem» (os geómetras) «para isso» (para as demonstrações) «de figuras visíveis, e que aplicam a elas os seus raciocínios, embora não seja nelas que realmente pensam, mas sim em outras figuras, por aquelas representadas. Por exemplo: os seus raciocínios não gravitam sobre o quadrado nem sobre a diagonal, tal como a traçam, mas sim sobre o quadrado tal como em si mesmo ele é, com a sua diagonal. Outro tanto digo das demais figuras que representam, quer em relevo, quer por meio do desenho, e que assim se reproduzem, já na sua sombra, já nas águas. Os geómetras empregam-nas como outras tantas imagens, que lhes servem para conhecer as figuras verdadeiras, as quais só pelo pensamento podem ser conhecidas... Se a geometria leva a alma a contemplar a essência das coisas, convir-nos-á; se se limita aos seus acidentes, não nos convém».

Como se explicaria um homem que pensava assim, se tivesse conhecimento da equação da figura? Que diria um homem que pensava assim, se soubesse da existência da Geometria Analítica ou de qualquer outro tratamento de problemas geométricos que dispensasse o recurso da visualização de figuras?

3. Se Jesus Caraça quiser ter a bondade de reler esses três livros da *República* (que são da segunda fase da obra platónica) e depois o diálogo do *Sofista* (o qual pertence à terceira fase), e o fizer de alma livre, sem preconceito algum, — poderá ainda pensar, como pensa agora, que é minha a interpretação que de Platão proponho; mas tenho a esperança de que concluirá também que não é lícito considerá-la como arbitrária, e que ela se justifica perante os textos.

4. As minhas designações de «Sombra» e de «Forma» (às quais correspondem — no inferior da escala — as de Sensível e de Inteligível) são sugeridas pela alegoria da Caverna (diálogo da *República*, livro sétimo), que é um dos textos de maior renome de toda a história da cultura humana, e que suporei conhecido dos leitores da *Vértice*. Infere-se desse passo da exposição platónica que aquelas duas noções de Sombra e de Forma são duas ideias correlativas (não absolutas, mas correlativas), pois as Formas se dispõem numa espécie de escada, sendo que uma ideia que se achar mais alta é Forma em relação à que se situar mais baixa, e Sombra em relação à que lhe estiver por cima. No ínfimo degrau dessa escada de Formas jazem as intuições sensíveis de que nós partimos, seguindo-se para cima das intuições sensíveis, de degrau em degrau, combinações intelectuais cada vez mais complexas, cada vez mais afastadas da intuição sensível, — correspondendo a Formas que são mais «formosas», por que assim digamos. No mais alto de tudo brilha a Forma do Bem, ou seja aquele Acto gerador das Formas com que coincide o Princípio da Inteligibilidade, — a Origem das origens, ou a Lei das leis.

E posto isto, venhamos aos exemplos da Matemática.

Chegado a este ponto, Caraça sugere veladamente a minha ignorância de tal disciplina; não cura de atingir o meu pensamento; arma-me labirintos de questões de palavras; e acaba por lançar esta confissão displicente: «Aqui, não posso deixar de usar de severidade para com António Sérgio»...

Ora aí está. Severidade. Vejam! Mas porquê severidade, meu caro Amigo? O ceder a um ímpeto de severidade absurda — a tal pendor emotivo — levou-o a fechar-se perante toda ideia, a impedir-se de compreender o que eu tinha dito (e que tão fácil era, que tão fácil era!). Injustiça comigo, sem assomo de dúvida; mas injustiça sobretudo com o seu próprio espírito, — com essa boa inteligência que o destino lhe deu, e que não quis empregar. A severidade é inimiga do entendimento, que desabrocha com a amizade e com o bom humor. Deixe-se de severidades, que não vêm aí a pêlo; ponha-me nesta mão a sua boa mão de amigo; ilumine-se interiormente, como quem está brincando: e não cerre ao que eu digo o seu entender diáfano, senão que o abra bem franco, bem juvenil, bem límpido. Valeu? Pois claro que sim. Vamo-nos a sorrir por essa estrada fora, e acompanhe-me no exame do seu próprio texto, sem nenhum finca-pé.

Diz assim o meu caro:

«A operação aritmética constitui a *sombra*, da qual é *forma* a operação algébrica». Que quer António Sérgio dizer com isto? Que são a operação aritmética e a operação algébrica? Nada, que me conste. Conheço, como toda a gente, um conjunto de operações definidas sobre entidades de várias naturezas: aritmética, algébrica, etc.»...

Basta. E pense. Que lhe parece? Diga... Se o meu caro Caraça não tem aí tomado, com a apaixonada severidade em que se deixou cair, a decisão inabalável de me não entender, haveria por força congeminado assim: pois que conheço operações definidas sobre entidades aritméticas, sobre entidades algébricas, etc., — «operação aritmética», na linguagem do Sérgio, vem a ser com certeza a designação comum para todas as operações com entidades aritméticas; e «operação algébrica», na linguagem do Sérgio, vem a ser sem dúvida a designação comum para todas as operações com entidades algébricas. Pois custava-lhe muito descobrir tal coisa?

Além disso, na página 123 do volume 1.º dos seus *Conceitos fundamentais da Matemática*, encontram-se as palavras que lhe aqui transcrevo: «No campo relativo, as duas *operações* [subtracção e adição] aparecem-nos assim unificadas numa só, que se chama *adição algébrica*».

Ora, se o meu Amigo se compreende a si mesmo quando fala no seu livro em *adição algébrica* e lhe chama ao mesmo tempo *operação*, como é que não logra perceber os outros quando pronunciam o termo de «operação algébrica»?

E vamos agora ao verdadeiro problema: Porque digo eu que a operação aritmética constitue a Sombra do que é Forma a outra? Lembre-se da definição de Sombra e de Forma; depois, *queira* compreender, — e compreenderá. É que a operação algébrica, comparada à aritmética, algo pressupõe que está mais distante da intuição sensível donde se partiu, e maior complexidade na elaboração mental. É possível traduzir em operação *imagética* a adição aritmética 3 + 2. Por exemplo: imagino uma fila de 3 pontinhos (ou de outras coisas quaisquer: três maçãs, três pedras, três surrões, três folhas; intuição sensível donde o processo parte) e ao pé uma fila de dois pontinhos (ou de duas maçãs, etc.); e *imagino* que um grupo se aproxima do outro, até se agregarem num acervo só. Tudo isso se visualiza, tudo isso se intue. Mas é impossível uma operação *imagética* (visual, intuitiva) em que se intuam ou imaginem, ao mesmo tempo, os dois actos mentais que se aqui indicam: $a + b$ e $a + (-b)$. (Ver, um pouco atrás, a sua observação sobre a adição algébrica).

Também insistiu em não querer perceber que há uma escada de Sombras e de Formas quando se passa de uma classe de números a outra; e acrescenta:

> «Do ponto de vista matemático, nada distingue, no que respeita à estabilidade mental, ao grau de inteligibilidade, os números inteiros dos números racionais ou estes dos reais; apenas os segundos são mais gerais do que os primeiros, mas isso é outra questão».

A resposta ao que diz é extremamente simples. Apresenta-se assim: o facto de umas classes serem mais gerais *não* é tal aí «outra questão», porque está relacionado com a verdadeira questão: já que o maior grau de generalidade da classe provém da inclusão nessa mesma classe de números que se encontram a maior distância (psicológica e lógica) da intuição sensível *donde se parte* (e que assim demandam para ser concebidos uma maior complexidade de elaboração mental) — do que os números inclusos na classe anterior. Claro, são igualmente inteligíveis todas as classes de números *no sentido absoluto* de tal palavra, que *não* é o sentido platoniano, como logo comecei por explanar na Nota. No platonismo (como aí foi explicado), o «inteligível» é correlativo do termo «sensível», existindo graus de inteligibilidade diversos, consoante o afastamento em que a elaboração mental se encontra dos sensíveis de onde o saber partiu.

Dizendo aquilo (claríssimo está) eu não pretendi de maneira alguma aperfeiçoar e esclarecer a classificação dos números. O intuito que tive na minha Nota não foi o fomento da doutrinação matemática: desvelei-me apenas por explicar Platão, por interpretar Platão, por justificar Platão, por mostrar que o filósofo, com visão profundíssima, antecipara o desenrôlo do saber científico, e que se não parece no mais mínimo traço com aquela pitoresca caricatura com que o meu Amigo nos presenteou.

A objecção que opõe, logo a seguir, à minha ideia de que o progredir científico, do número inteiro ao imaginário, seguiu o rumo que nos inculcou Platão — alegando-me para isso a «representação» geométrica dos números complexos a duas unidades — resulta da confusão que o meu Amigo fez entre dois sentidos completamente diversos daquele mesmo vocábulo «representação», — a saber: por uma banda, o significado psicológico que eu lhe dei, e que corresponde à *origem* dos números inteiros, ou de intuição sensível *de onde se parte*, de intuição de coisas naturais do Mundo (a qual está *no início* da elaboração mental); e por outra banda, o significado *de interpretação de carácter simbólico*. A estátua de uma mulher que traz os olhos vendados, com a balança numa mão e na outra a espada, costuma dizer-se que «representa» a Justiça; mas é uma representação no segundo sentido (alegorial ou simbólico), e não foi a partir de uma estátua dessas que a ideia da Justiça se concebeu. «Representa» a Justiça por processo simbólico, e é *posterior* à concepção da ideia do Justo — sem que aliás tal simbolismo seja coisa arbitrária, pois existe de facto relação entendível entre os caracteres da estátua e os caracteres do Justo». Porém, aquela «representação» a que eu me referi — a «representação» de onde *sairam* os números inteiros (mas de onde *não* sairam os números complexos) é a «representação» no sentido geral psicológico, a intuição que temos *inicialmente* das coisas *naturais* de carácter sensível — como a de cinco calhaus, a de cinco bolotas, a de cinco carneiros, a de cinco folhas, que *precede* a concepção do número cinco. O vocábulo «representação» aparece aí no sentido inicial e psicológico (no de intuição sensível de onde a ciência *parte*), e não no sentido de interpretação simbólica, *posterior* à coisa que por aí se interpreta. Ora bem: o que se chama «representação» de um número complexo não é um sensível de onde ele saiu, e «representa» o complexo à semelhança de um símbolo, um tanto como a estátuta representa a Justiça (por meio de um simbolismo que não é arbitrário, tornarei a dizê-lo). A noção de número imaginário puro foi introduzida por Bombelli no século XVI, como um puro inteligível que realmente é, sem nenhuma raiz de intuição sensível, por uma mera elaboração de sinais matemáticos: e só no final do século XVIII se inventou uma interpretação que lhe emprestasse figura, e que à semelhança de um símbolo «representasse» o número. Um equivalente *geométrico* (não *natural*, como as cinco folhas), como o meu Amigo diz. A «representação» concernente ao número inteiro é um sensível *natural* de onde a ciência *parte;* a «representação» concernente ao número complexo é uma interpretação *geométrica* a que a ciência *chega.* Uma está na *raiz* do processo científico, a outra foi um *fruto* de tal processo. A «representação» do complexo, por conseguinte, nada tem que colida com o que eu afirmei, e o argumento a que acode não faz sentido.

Em seguida, atira-me com a luneta de Galileo. Para o nosso caso, isso da luneta não demonstra nada. Ou, antes: prova o contrário do que pretendeu provar. Seria eu o último dos imbecis se sonhasse que se progride na ciência física sem se recorrer ao *instrumento* da observação das coisas. Observações, instrumentos? Claro que sim, e quantos mais, melhor. Mas o instrumento de observação é aí *instrumento;* e o *resultado* da obra, bem visto o processo, consiste numa libertação cada vez mais funda em relação ao sensível de onde o saber partiu. Qual foi em Astronomia o *resultado* supremo a que aportou o autor dessa luneta astronómica? — O de convencer-se da verdade da teoria heliocêntrica, quer dizer: da concepção que contraria de uma maneira aspérrima o testemunho imediato dos sentidos, a ideia sugerida pela intuição sensível.

Do movimento do Sol em redor da Terra todos nós recebemos uma sugestão sensível; do movimento da Terra em redor do Sol ninguém pode cobrar uma convicção dessa ordem; pelo contrário: continuamos a ver o inverso disso, continuamos a ter uma *visão* geocêntrica, apesar da existência de uma *ideação* heliocêntrica; e no entanto, é contra o sensível que o saber depõe. O progresso, aí, (como em todos os casos) acompanhou a audácia de voltar as costas às doutrinas que os sentidos naturalmente inculcam.

E já que de Galileo me vem falar agora, lembre-se das investigações sobre os movimentos dos corpos. A crença insinuada pela intuição sensível é a da queda destes com rapidez diversa, é a tendência para a subida dos corpos «leves»; a de que em geral os movimentos que na Terra ocorrem se gastam à medida que avança o móvel, até que se exaurem — por natureza sua — e que falecem, por fim. Só se chegou às leis da queda dos corpos contrariando as sugestões da intuição sensível; logrou-se formular o princípio da inércia repelindo a obsessão da intuição sensível. O movimento uniformemente variado não nos é nunca exibido pela intuição sensível: foi preciso *inventá-lo* por uma invenção libérrima, por um puro inteligível, — e verificá-lo experimentalmente só depois, *inventando* o processo de verificação dessa ideia. Este lema da liberdade em relação ao sensível, da livre invenção pelo dinamismo do espírito, constitue quanto a mim a significação profunda (de inspiração platoniana) de certas frases de Einstein e de Leopoldo Infeld, que aqui vou transcrever (com itálicos meus):

«La science n'est pas une collection de lois, un catalogue de faits non reliés entre eux. Elle est une *création* de l'esprit humain au moyen d'idées et de concepts *librement inventés*... Les concepts des nombres purs 2, 3, 4 ..., dégagés des objets qui leur ont donné naissance, sont *des créations* de *l'esprit pensant*, qui décrivent la réalité de notre monde... La physique a commencé réellement par *l'invention* de la masse, de la force et d'un système d'inertie. Tous ces concepts sont des *inventions libres*»... (*L'évolution des idées en physique*, pág. 286-7).

Por outro lado, o uso da luneta por Galileo está ligado ao surto de uma astronomia matemática que foi prevista deste modo pelo Platão da *República:*

«Sem dúvida, convém considerar os ornatos que decoram a abóbada dos céus como o que há de mais belo e de mais acabado na sua ordem: no entanto, como pertencem à ordem das coisas visíveis, cumpre encará-los como muito inferiores aos verdadeiros astros, que a verdadeira rapidez e a verdadeira lentidão, consoante o número verdadeiro e todas as figuras verdadeiras» (isto é, não os astros como nós os vemos, mas como a astronomia matemática será capaz de os conceber) «produzem nos seus movimentos respectivos e nos corpos celestes a que estão conexos. Ora, todas essas coisas escapam à vista, e só podem ser captadas pela inteligência e pelo pensamento. Quero pois que os ornatos do céu visível sejam a imagem do céu inteligível» (interpretemos: que consideremos os espectáculos do céu visível como imagens das relações numéricas da astronomia matemática, do seu conjunto de equações) «e que sirvam para a nossa instrução não mais do que serviriam para um geómetra os desenhos imaginados e traçados com arte incomparável por Dédalo ou por qualquer outro escultor ou pintor. Não deixando de considerá-las como obras-primas quanto à arte, um geómetra acharia ridículo o apegar-se sèriamente a elas para descobrir a verdade absoluta das relações entre quantidades, — iguais, duplas ou quaisquer outras» *(Livro sétimo)*.

De certo, isto não está dito com a clareza de linguagem com que se exprimiria um astrónomo do nosso tempo, depois de realizado o programa científico que Platão na *República* antecipou; mas exigir tal coisa seria de nós um absurdo, e convém que um matemático não queira ler um filósofo na atitude agressiva da «severidade», mas que faça um esforço de simpatia lúcida para chegar ao entendimento do que ele quis dizer-nos. É tão belo o ser justo! É tão bom o entender! E vale a pena, acredite. Platão merece-o. Não se habitue a si mesmo e aos seus leitores entusiastas a considerarem como obra de cultura autêntica o deliciarem-se na total incompreensão de um génio, e a tratarem de resto um pensador sublime.

Cumpre-nos, porém, examinar a eito toda a série de argumentos que me quis opor. Prossigamos, portanto. O que vem agora é o seguinte:

«Examinemos por fim o quarto exemplo, que é o exemplo central da Nota — a equação de uma curva é a *Forma* em relação à figura, que é a sua sombra. Esta afirmação é, à primeira vista pelo menos, melhor sustentável que as outras e conduz no fundo a uma afirmação de superioridade da nossa capacidade intelectiva da relação numérica sobre a nossa capacidade imaginativa da figura. Mas deu-se António Sérgio conta, ao emitir este juízo, das dificuldades que lhes estão inerentes? Em primeiro lugar, admitindo que nós nos pomos de acordo sobre o que é uma curva, questão que me não parece que esteja ainda resolvida pelos matemáticos (ver a este respeito, por exemplo, *Encyclopädie der matematischen Wissenschaften, Die Begriffe Linie und Fläche, H. Mongoldt, III, I. I*) uma curva não tem apenas uma equação, tem uma infinidade delas, dependentes da escolha do sistema de referência; teremos, assim, a mesma *sombra* com uma infinidade de *Formas*, o que me parece complicar um pouco a técnica platoniana. Além disso, as relações de uma equação a duas variáveis em geometria plana com a sua imagem geométrica são por vezes tão complicadas que se me afigura difícil que elas caibam no simples enunciado de uma relação de *sombra* a *Forma* em linguagem platoniana. Quer António Sérgio ajudar-me a esclarecer estas dúvidas? E dizer-me, por exemplo, como cabe no quadro de relações de *sombra* a *Forma* platonianas a relação da equação

$$y^2 \log \cos. x - 1 = 0$$

à sua imagem — sombra — aparência?»

Se quero ajudá-lo a esclarecer as dúvidas? Está visto que sim. Neste caso são três:

Primeira: se é legítimo empregar a palavra «curva» antes de os matemáticos acordarem sobre ela;

Segunda: se é possível (ou se não é «complicado», de entendimento difícil) o facto da existência de grande número de coisas que têm *a mesma* relação com outra coisa;

Terceira: se é possível a conciliação entre uma escada de Formas (ou série de relações de Sombra e de Forma) e a complicação dos vínculos de certas particulares equações com as imagens geométricas que lhes podem estar conexas.

Quanto à primeira (e tomando-a a sério):

Que eu saiba, nenhum homem de ciência dos que até hoje existiram (e incluindo os de agora, em publicações recentíssimas) hesitou em empregar a palavra «curva». Um Einstein, por exemplo, vejo que não trepida em fazê-lo; um Langevin, por exemplo, vejo que não vacila em fazê-lo; um de Broglie, por exemplo, não mostra perplexidade ao fazê-lo. Em todos os trabalhos do Professor Caraça (nos de matemáticas, entenda-se) se verifica o emprego da palavra «curva». Abro o *Cálculo Vectorial*, do Professor Bento de Jesus Caraça (Lisboa, 1937), na página 151, e lá topo: *«Comprimento do arco de uma curva.* Seja uma curva (c), figura 42»... Depois, na página 168, começa-se um parágrafo sobre «coordenadas *curvilíneas»;* e na página 181, outro sobre «problemas de *curvatura* e *curvas* torsas». Curva, curvilíneo, curvatura: é o que nos diz Caraça. E não sabendo os matemáticos o que seja uma curva! Que nos diria, então, se por acaso o soubessem? Nos *Conceitos fundamentais da matemática,* obra mais recente do Professor Caraça (de Junho de 1942), lê-se na página 37, segundo volume:

> «Seja (Fig. 3) um sistema de referência cartesiano e uma *curva* (c) que não seja cortada em mais de um ponto por uma paralela ao eixo Oy. Essa *curva* permite definir uma função»...

Para definir uma função, o Professor Caraça escolheu uma *curva.* E foi nisso coerente consigo próprio, pois diz na página 41 que «as funções mais importantes, pelo menos no ponto de vista das aplicações», se encontram entre «aquelas cujas imagens são *curvas* no sentido corrente». E ora aí está. Foi por concordar com este parecer de Caraça que fiz eu o mesmíssimo do que ele fez ali, ou seja escolher um exemplo de curva ao referir-me às relações das funções matemáticas com as imagens geométricas que lhes correspondem.

E arrumada esta brincadeira, podemos passar à segunda dúvida.

Suponhamos que um homem teve uma dúzia de filhos, cinco dúzias de netos, vinte e cinco dúzias de bisnetos. Os doze filhos do indivíduo em questão ostentam todos para com o nosso homem *a mesma* relação de filho e de pai; os sessenta netos, *a mesma* relação de neto a avô; os trezentos bisnetos, *a mesma* relação de bisneto a bisavô. Prolongue-se a ideia pelas gerações em fora, e fantasie o meu Amigo onde se irá parar. Conjecture-se que a gerência dos automóveis Ford vendeu automóveis a um milhão de indivíduos. Todas as pessoas que lhe compraram carros ficaram tendo com a administração da Ford *a mesma* relação comprador-devedor. Imaginemos ainda que um senhor qualquer se coloca de súbito entre um jogo de espelhos. Reflectem-se nesses espelhos as imagens dos outros, e quem olhar para eles vê uma infinidade de imagens, sendo que as imagens que assim se formam têm todas para com o corpo do cavalheiro em questão *a mesma* relação imagem-objecto. «Complicam» estes factos de qualquer maneira o entendimento das relações bisneto-bisavô, comprador-vendedor, imagem-objecto? Não vejo que compliquem de maneira alguma, e que haja dificuldade em compreender a coisa. Há muitas equações para uma mesma curva? E depois? Em filosofia platónica, *todas* mantêm para com a dita curva *a mesma* relação de Forma e Sombra, assim como *todos* os compradores de Fords mantêm com a gerência das oficinas Ford *a mesma* relação de comprador-vendedor. No caso da curva, a multiplicidade de entidades com *a mesma* relação — não é mais «complicada» que nos outros casos, isto é, que nesses outros exemplos que anteriormente eu dei.

E passemos, por conseguinte, à terceira dúvida.

Aqui, como a *Vértice* não é uma revista para professores de matemáticas, tenho eu de me lembrar do nosso Leitor Geral, meu irmão em ignorância, que só sabe as matemáticas da instrução secundária, ou que pouco mais saberá. Deixo de me dirigir ao Professor Caraça, embora para responder às observações que ele me fez. Respondo-lhe a ele, mas dirigindo-me à cultura do meu Leitor Geral, caloirinho em matemática.

Ora pois. Dada uma equação, — ou é ela traduzível (digamos assim), de uma maneira *imediata*, no domínio do sensível (de uma maneira *directa*, de uma maneira *perfeita)*, por uma imagem geométrica que corresponde à equação; ou só é traduzível por um processo *mediato* (por uma maneira *indirecta*, por um teor *imperfeito*). Posto isto, se é possível traduzi-la de uma maneira *directa* (imediata, perfeita) diremos que a equação e a imagem geométrica se encontram cada uma em relação à outra como degraus *sucessivos* de uma escada de Formas, isto é, como degraus sem intervalo numa escada de Formas; e se só é traduzível de uma maneira *indirecta* (mediata, imperfeita) diremos que a equação e a imagem geométrica se encontram uma delas em relação à outra como degraus *não sucessivos* de uma escada de Formas, como degraus *com intervalo* de uma escada de Formas. A relação de uma Forma com outra coisa *não* tem de ser sempre a de uma ideia a uma *imagem*. Isso ocorre sòmente no mais baixo da escada, onde se coloca o sensível. De aí para mais alto, as relações que se encontram são de ideia a ideia (de relação a relação), tendo o papel de Forma, em relação à outra, a que é de grau superior de elaboração mental, — isto é: a que vem lògicamente depois da outra. No caso da tradução a que chamei *imperfeita*, pode haver uma imagem que represente mal a equação (vou em breve explicar); acima dessa imagem, na escada platoniana em que se dispõem as Formas, está aquilo que designamos como *limite* da imagem, o qual não é visualizável (vou em breve explicar), e que é pois uma Forma em relação à imagem; e acima do *limite* para que tende a imagem está a Forma dessa Forma, que vem a ser a equação. Entre o degrau da equação e o degrau da imagem, há o degrau ocupado pelo *limite* da imagem, que é uma Forma intermédia.

Só me falta exemplificar o que aí dei por admitido, a saber: que quero eu exprimir por tradução *indirecta*, ou tradução *imperfeita?* e que é o *limite* da imagem?

Suponho que os conhecimentos do Leitor Geral, meu irmão em ignorância, vão ao ponto de perceber que a equação ou Forma (em coordenadas cartesianas) que lhe aqui transcrevo:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad ou \qquad x^2 + y^2 - r^2 = o$$

se traduz *imediatamente* por uma certa imagem: a que se diz «circunferência»; e cumpre-me fazer ver por um exemplo concreto o que seja a tradução a que eu chamei *imperfeita* (ou mediata, ou indirecta) e o *limite* para que tende essa tradução imperfeita. E depois disso, dissipam-se as dificuldades a que aludiu Caraça, se vejo a que género de dificuldades quis aludir Caraça.

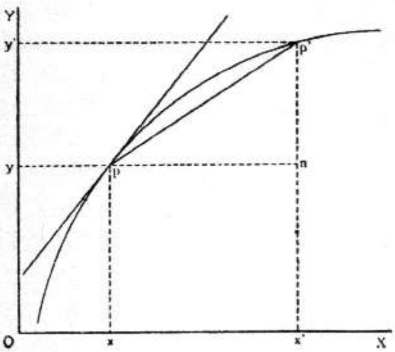

Fig. 1

Suponha-se uma curva (figura 1), e que nos interessa o problema da inclinação da curva (considerada em relação ao eixo dos $xx$) em certo ponto determinado dela, como seja por exemplo o ponto $p$ (compare-se com o declive de uma ladeira, ou o ângulo que ela forma com a horizontal). Escolho na curva um ponto $p'$ e busco a inclinação média entre $p$ e $p'$, o que se consegue dividindo o quanto sobe a curva no trajecto que vai de $p$ a $p'$ ($np' = yy'$) pela projecção horizontal desse trajecto ($pn = xx'$) ou seja:

$$\frac{p'n}{pn} = \frac{yy'}{xx'}$$

Esta inclinação média entre $p$ e $p'$ não é igual à que existe no próprio ponto $p$ (no caso representado na figura, a inclinação em $p$ é maior que a média), mas dará uma aproximação tanto mais aceitável quanto mais aproximado se achar de $p$ o segundo ponto que nós escolhermos ($p'$). A inclinação média de que aí falamos,

$$\frac{p'n}{pn} = \frac{yy'}{xx}$$

é o coeficiente angular da *secante* $pp'$; e a inclinação no ponto $p$ é o coeficiente angular da *tangente* em $p$; e poderíamos definir a tangente em $p$ como sendo a recta para que tende a secante que passa pelo dito ponto $p$ quando o ponto $p'$ se aproxima de $p$, indefinidamente. A inclinação em $p$ é o valor *limite*, por conseguinte, para que tende a inclinação média entre $p$ e $p'$, quando aproximamos indefinidamente o ponto $p'$ de $p$; e a tangente da curva no ponto $p$ é a recta que passando pelo mesmo ponto apresenta na totalidade do seu percurso a inclinação da curva no ponto $p$, coeficiente angular da tangente em $p$. (A ideia da tangente, como se está aí comprovando, é o movimento contínuo de pensamento que leva a recta de uma posição a outra pela aproximação indefinida de $p'$ a $p$: mas não se veja nisto qualquer novidade, porque já a própria ideia de linha recta poderia ser definida sem nenhum abuso como o movimento contínuo de pensamento que adelgaça indefinidamente um traço visível).

A relação que exprime a inclinação média, ou seja o coeficiente angular da secante,

$$\frac{p'n}{pn}$$

é a relação entre o acréscimo $yy'$ da ordenada, $y$, e o acréscimo $xx'$ da abcissa, $x$, quando passamos de $p$ ao ponto $p'$; e se $y = f\ (x)$ (leia-se: «$y$ igual a função de $x$») for a equação da nossa curva, o limite para que tende a relação

$$\frac{\textit{acréscimo de } y}{\textit{acréscimo de } x}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx},$$

a partir de um valor determinado de $x$, quando o acréscimo $dx$ tende para zero, chama-se «derivada» da função $f\,(x)$ para o valor considerado da variável $x$. O problema, pois, de achar a inclinação ou declive da curva no ponto $p$ de abcissa $x$ (ou seja o valor do coeficiente angular da tangente à curva no ponto $p$, de abcissa $x$) é o de achar a derivada da função

$$y = f\ (x),$$

equação da curva, para o valor de $x$ que nós consideramos (ou valor da abcissa no ponto $x$).

(Todo o raciocínio vem aqui estribar-se, como se advertirá sem fadiga, no poder *permanente*, que se nos revela em nós, da repetição indefinida do mesmo acto mental: o acto mental de aproximar os dois pontos; ou na inexgotabilidade, na eternidade, na intemporalidade desse acto; ou na infinita criatividade do dinamismo do espírito; ou na estabilidade e imanência daquela Forma do Bem — daquele Uno unificante, criador das Formas, — que no alto das Formas colocou Platão).

Mas prossigamos. Será acaso possível que exista uma curva que num certo ponto do seu percurso não admita tangente, — e portanto (dada a ideia da correspondência entre equações e linhas) haverá função que não tenha derivada para um certo valor da variável $x$?

Busquemos agora se pela *imaginação* (ou seja pela faculdade de poder ter *imagens;* pelo dom de representação, no sentido psicológico; pela intuição *sensível*) encontramos uma resposta para tal pergunta.

Dado o que observámos um poucochinho atrás, a questão de saber se há sempre tangente, — essa questão, digo eu, coincide, afinal, com estoutra dúvida: será que *sempre* a inclinação entre $p$ e $p'$ tende para *determinado* valor limite quando $p'$ se aproxima indefinidamente de $p$? Assim ocorre, sem dúvida alguma, com todas as curvas a que até certa data se havia aplicado o procedimento anterior (circunferência, elipse, hipérbole, parábola, etc., etc.). Porém, não sucede assim com todas as curvas, como iremos verificar de maneira fácil se examinarmos a linha da figura 2.

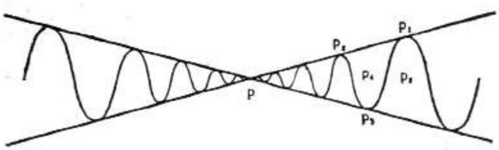

Fig. 2

Mais uma vez nos servirá o recurso da repetição indefinida do mesmo acto mental, por isso que se trata de uma linha ondulada a que atribuímos na proximidade do ponto $p$ uma quantidade indefinida de ondulações (que não podemos *visualizar,* mas que podemos *idear;* de que não sentimos *imagem,* mas de que temos *Forma*). O comprimento e amplitude das ondulações da linha diminuem indefinidamente nas imediações de $p$. Ora bem: qual poderá ser, neste ponto, a inclinação da curva que se tem presente?

Façamos o que fizemos um pouco atrás, isto é, escolhamos na linha um segundo ponto, $p'$, e busquemos o valor do declive médio entre o ponto que nos interessa e este segundo ponto. Suposto que $p'$ se situou em $p_1$, acha-se no caso da figura 2 que é 1 o valor do declive médio, entre $p$ e $p'$ (agora em $p_1$). Se aproximarmos $p'$ do ponto $p$, haveremos de notar que é cada vez mais pequena a inclinação média entre $p$ e $p'$, até que será zero ao chegar a $p_2$. Se continuarmos aproximando $p'$ de $p$, a inclinação média entre p e p' passará agora a valor negativo, e descerá depois ao valor —1, quando $p'$ chegar à posição $p_3$. Se p' continuar a aproximar-se de $p$, eis começa a aumentar a inclinação média da curva entre o ponto $p$ e o ponto $p'$, tornando a zero ao chegar a $p_4$, e tornando a +1 ao chegar a $p_5$. Continuando a aproximação, repetem-se os casos. Por cada onda completa que percorre $p'$, o declive médio passa de +1 a +1, por intermédio de —1, por esta série de estados: +1, 0, —1, 0, +1. Se supusermos, portanto, que $p'$ se aproxima indefinidamente de $p$, o declive médio entre $p$ e $p'$ oscilará indefinidamente entre +1 e —1, e ser-nos-á impossível o dizer, portanto, que se aproxima indefinidamente de um valor limite. Logo, não poderemos falar, com respeito a esta curva, de uma inclinação determinada naquele ponto $p$, ou de uma tangente determinada naquele ponto $p$.

Ora bem. Agora, se nos vier falar um professor de matemática em determinada função que não tem derivada para *um* dado valor da variável $x$, a nossa *imaginação* não sofrerá abalo (a nossa faculdade de sentir *imagens*, de evocar *sensíveis*). — Estou *vendo*, poderemos nós dizer-lhe; essa função que nos diz é o correspondente *inteligível* de uma curva do género da da figura 2, — a qual vemos, sentimos; da qual temos *imagem* (pelo menos em parte).

Mas Weierstrass, em 1861, fez um achado que é de encantar um platónico: descobriu uma função que não tinha derivada para *nenhum* dos valores da variável $x$, a que deveria corresponder, no que toca ao *sensível* (à representação espacial, à visualização, à imaginação) uma curva que em *nenhum* sítio do seu percurso se nos mostra como capaz de uma inclinação determinada; isto é, sem tangente determinada em ponto algum. E outras muitas se descobriram depois da dele.

E agora? Que vemos nós aqui? Nada, não é isso? Nada. Não existe tradução da função sem derivada na linguagem própria da intuição sensível. Pelo menos, tradução directa, perfeita, imediata. Estamos no caso, enfim, a que me reportei há pouco.

E que coligir da aventura? Cumpre agora concluir que o inteligível falha, e que nos leva neste lance a uma combinação fantástica, ao sonho de um sonho, — sem nenhuma ligação com a realidade básica, com o essencial deste Mundo? Ou concluiremos platònicamente que é o sensível o sonho, e a actividade do pensamento a característica básica, o real do Real? E quanto à geometria a que chamarei cartesiana (a intelectiva, em suma; a chamada «analítica») que inferiremos nós deste caso: que é ela um comentário da imaginativa, ou esta uma imperfeita tradução daquela? Na aventura das funções sem derivada alguma, surpreendemos a álgebra a criar geometria, ou a laborar no vazio, — a sonhar com sonhos?

Suponhamos a linha da figura 3. Considere-se ascendente o trajecto da esquerda, descendente o outro. Substituamos agora o trajecto

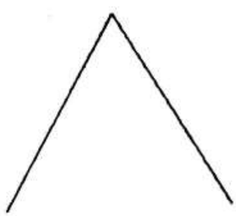

Fig. 3

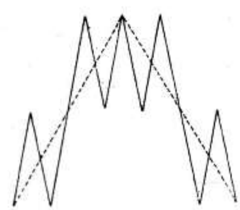

Fig. 4

ascendente pelos traços que vemos na figura 4, os quais nos compõem um trajecto novo, em que primeiro nos elevamos até o nível médio, descemos em seguida até vir ao mais baixo, subimos depois até o máximo nível, para cairmos agora até meia altura, e por fim remontarmos até a altura total; e, pelo que respeita à porção descendente, faremos aí substituição análoga. Depois, procedamos com os trajectos da figura 4 como procedemos com os trajectos da figura 3, e obteremos um percurso como o da figura 5, em que o número de pontas já se tornou maior. Recorra-se novamente à anterior ideia da repetição indefinida de um acto mental, fantasiando-se sucessivas fragmentações do trajecto, pelo

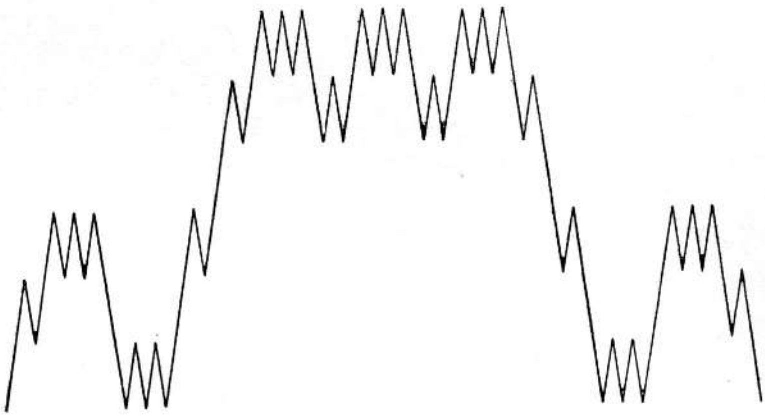

Fig. 5

mesmíssimo processo que se indicou há pouco. Ora, demonstram os matemáticos com o maior rigor que as figuras constituídas por este modo se aproximam indefinidamente de uma certa curva que apresenta a particularidade a que acima aludo, a saber: a de que em parte alguma do seu percurso existe inclinação determinada nela; por outra maneira: a de não ter tangente em ponto algum. Corresponde portanto a uma das tais funções que foram descobertas por Weierstrass, ou funções contínuas que não têm derivada para valor algum da variável.

Porém, ao passo que podemos visualizar a curva para que tende um polígono regular qualquer ao qual decidimos aplicar a ideia da continuação indefinida do movimento mental de duplicarmos os lados que o constituem (isto é: a circunferência), somos incapazes, pelo contrário, de realizar a visualidade dessa estranha curva para que tende a linha da figura 5 quando sobre ela pensamos semelhante ideia, quer dizer: a do prolongamento indefinido do acto mental que nos levou da linha da figura 4 para a linha representada na figura 5. (Se nos dessem uma equação qualquer a que nem imagens *imperfeitas* nos fosse possível ligar, estaríamos em presença de um inteligível puríssimo, sem correspondente sensível, como tantas das Formas que exemplificou Platão).

Muito resumida- e tosquissimamente, fica justificado o que eu disse há pouco, e que responde à dúvida que me apresentou Caraça. A linha representada na figura 5 exemplifica o que eu chamo tradução *imperfeita* de uma estranha equação sem derivada alguma. É um certo degrau numa escada de Formas. Acima dela, está a linha *limite* para que essa tende à medida que aumenta o seu número de lados, e de que nos não é possível formar *imagem* (mas que é possível *idear* através da imagem), sendo pois uma Forma em relação àquela; e acima, ainda, desta linha limite,—está a equação correspondente sem derivada alguma. O caso não conturba, mas confirma até, a ideia platoniana da progressão das Formas. Posso pois transitar para o seguinte ponto, e voltar a dirigir-me ao Professor Caraça.

5. Meu caro Caraça. Pergunta-me depois porque chamei inimaginável (e nisso platónica) à Física de Einstein. Aqui, vou dar homem por mim: e espero que reconheça competência científica ao excelente procurador que decidi tomar, e que é nada menos do que o próprio Einstein. E não preciso de recorrer a outra obra dele além dessa mesma que já atrás citei. No livro *L'évolution des idées en physique,* do dito Einstein e de Leopold Infeld, p. 219-220, podemos ler o seguinte:

«Nous devons aborder un nouveau problème, celui de la connexion entre la théorie de la relativité générale et la géométrie. Commençons par la description d'un monde où vivent seulement des êtres à deux dimensions. Les films nous ont habitués à voir des êtres à deux dimensions agir sur un écran à deux dimensions. Imaginons maintenant que ces fantômes, c'est-à-dire les acteurs sur l'écran, existent réellement, qu'ils aient la faculté de penser, qu'ils puissent créer leur propre science, et que pour eux l'écran à deux dimensions représente l'espace géométrique. Ces êtres sont incapables d'imaginer, de façon concrête, un espace à trois dimensions, *exactement comme nous sommes incapables d'imaginer un espace à quatre dimensions»* (os itálicos são meus).

Ora aí está. Digo que a Física de Einstein é uma ciência inimaginável (e por aí platónica) porque somos incapazes de *imaginar* (como diz Einstein) um espaço a quatro dimensões. A Física einsteiniana, pois, parte decerto da intuição sensível — mas para voltar as costas ao sensível. A Física de hoje (mais geralmente falando) estriba-se numa série de noções científicas que se mostram renitentes à tradução por *imagens*, — por vivências do domínio da intuição sensível.

Em seguida àquela pergunta, argumenta assim o meu bom Amigo:

> «Se alguma coisa caracteriza a Física post galileana é a interacção da teoria e da experiência, o reconhecimento da unidade do pensamento e da acção, que a faz tomar sempre como critério do valor de uma teoria o seu acordo com os resultados da observação, que não reconhece verdade onde não haja confirmação da experiência. É claro que a experiência é já de si racionalizada, orientada, por uma condução teórica, mas no fundo tudo se resolve numa medição, numa observação sensorial e sua interpretação, enfim, numa operação em que o raciocínio actua sobre os dados dos sentidos. É isto compatível com a raiz do pensamento de Platão?»

Se é compatível? Eu digo que o é. Ou, com maior rigor: no que há de exacto nas afirmações que aí faz não vejo a mínima incompatibilidade possível com a raiz do pensamento de Platão. Suplico-lhe muito que o leia *bem*, com vontade de compreender o que lá está dito. O que o filósofo realmente aconselha não é que se não observe o aparecer sensível: é que nos não deixemos dominar por ele, pela conclusão imediata que em nós suscita, se quisermos «caçar» a realidade das coisas; é que essa realidade se nos não dá no Sensível, e que é preciso «caçá-la» *contra* a vontade *deste* (por que assim digamos) com a «livre invenção» de que nos falou um Einstein; é que tenhamos sempre para com as sugestões do sensível a atitude da desconfiança mais enérgica, da crítica mais suspeitosa e mais tenaz. Quem assim não faça — repelirá logo no primeiro assomo o paradoxo de que a Terra é que está girando; quem assim não faça — repelirá logo no primeiro assomo o paradoxo de uma curva sem tangente alguma; quem assim não faça — repelirá logo no primeiro assomo o paradoxo de uma geometria a quatro dimensões, e o de que seja possível aplicá-la ao real... e o paradoxo de que a água é um composto de gases; e o paradoxo de que esta mesa, que aqui vejo inerte, é um agregado de coisinhas que se movem rápidas. Desde Platão até hoje, só foi possível progredir no saber combatendo contra a imensa multidão dos homens que se deixam dominar pelo aparecer sensível; e a mentalidade espontânea e não-platónica é que perseguiu os paradoxos de um Galileo. Toda a ciência é um paradoxo imenso, uma negativa constante contra a opinião espontânea, insinuada pelas aparências da intuição sensível. Para aceitar a teoria do heliocentrismo, revela que «usemos do pensamento só»; para aceitar a teoria da relatividade geral, revela que «usemos do pensamento só»; — não confundindo o inteligível com o imaginável, o pensar verdadeiro (o conceber, o idear) com o imaginar.

A ciência exige a destronização do sensível, a revolta contínua contra o império dele. Não se sendo platónico (ainda que sem querê-lo, sem se saber que se o é) não se chega lá.

Afora isso (que é o essencial do caso) há nesse seu trecho um relanço ou outro em que pediria ao Caraça que meditasse um tanto. Diz (e muito bem) que a experiência é já de si racionalizada; pouco antes, todavia, fala da «interacção da teoria e da experiência», separando-as desse modo uma da outra, como dois absolutos que se defrontam; ora, se aquele enunciado é verdadeiro, este último pensamento cai por terra. Toda aferição é de ideia a ideia, de Forma a Forma. «No fundo» (diz também) «tudo se resolve numa medição, numa observação sensorial e sua interpretação, enfim, numa operação em que o raciocínio actua sobre os dados dos sentidos». Assim diz. Tudo se resolve numa medição. Ora, sucede sempre que uma medição, em derradeira análise, é uma relacionação entre dois comprimentos; e um comprimento, por sua vez, não é um sensível, mas uma ideia; não é uma imagem, mas uma Forma. Afinal, o comprimento é uma relação; e a relacionação de comprimentos, que constitue a medida, é um acto de relacionação dessa relação; é uma Forma que se exerce sobre a mesma Forma. E nisso enfim é que se resolve tudo, diz o meu Amigo. Muito bem. E depois? Platão contempla-nos; e espera; — e sorri. (O platonismo é uma filosofia da Relação, opondo-se como tal ao aristotelismo, filosofia da inerência e da intuição sensível, do animismo, da classificação).

6. Chegámos enfim ao derradeiro ponto. Resume-se nisto:

«O instrumento de ataque cujo uso levou assim a uma completa revolução na ciência, é o método dos limites, de que a noção de derivada constitue uma das primeiras grandes realizações. Este método permitiu abordar o estudo da realidade, das *fluentes* na nomenclatura de Newton, através de hipóteses sobre a sua variação. Quer dizer, foi a variação, foi o *devir* que passou a ser tomado como fonte de conhecimento da realidade fluente. Da utilidade deste método falam mais de duzentos anos de Física Matemática, apoiada no recurso constante às Equações Diferenciais cujo significado não é outro que o que acabei de apontar».

Cujo significado, direi eu, é exactamente o contrário do que acabou de apontar. Quanto a mim, é sempre o contrário do que nos aí proclama. Absolutamente o contrário. Em primeiro de tudo, repare em que o devir *não é* tal, no Cálculo, a *fonte* do conhecimento, — assim como quer: o devir é o *objecto* que essa ciência estuda; o devir é o *tema* a que se dedica nela a actividade conhecente da nossa psique; *a fonte,* aí, é a actividade do espírito; é um dinamismo que se caracteriza de maneira básica pela unidade transcendental da apercepção, — a qual *nunca* flue, e só pode conhecer porque *não* é fluente; o método dos limites (como já vimos atrás) funda-se na *permanente* possibilidade interna da repetição indefinida do mesmo acto mental, graças à Unidade unificadora anímica a que Platão deu o nome de Forma do Bem; e por outra banda, o produto da actividade que aí tem o espírito é aquilo a que se chama Equação Diferencial, como o meu Amigo afirmou; e a Física progride (como outrossim advertiu) porque vai apoiada, constantemente, no recurso à Equação Diferencial. Mas que significa esta última, meu caro Caraça? A Equação exprime uma relação *constante,* a que o fluxo obedece no seu fluir; é, através da variação, o que *não* varia. Como a unidade transcendental da apercepção no Eu; como o Acto em que se apoia, na concepção dos limites, a possibilidade da repetição do mesmo acto mental, — a Equação Diferencial *não* é também fluente, exprimindo uma relação que outrossim *não* flue. Sabe que mais? É um exemplo luminoso, cabal, perfeito, daquilo a que Platão deu o nome de Formas, — ou, antes, é um exemplo das manifestações da actividade da FORMA (da Forma do Bem), fonte da espontânea criatividade do espírito, das «livres invenções» do labor científico, a que Einstein aludiu.

Estou chegado ao fim. «Il est fort difficile pour un savant d'apprécier exactement l'œuvre d'un philosophe». Escreveu-o há pouco Luis de

Broglie, no momento em que prestava muito admirativa homenagem a um filósofo francês do seu próprio tempo, falecido há dois anos. Se um Luis de Broglie reconheceu tal coisa, não deve ser difícil a um professor de matemática (ainda que distinto como o meu Amigo é) admitir a hipótese de que apreciou mal Platão. Rogo-lhe, pois, ao encerrar o discurso, — e apertando-lhe outra vez a sua mão amiga — que resista ao pendor de querer ser severo e que não feche o seu espírito à compreensão do filósofo, — para que possa evocar aos seus admiradores sinceros aquelas cândidas palavras do atormentado Swift: «*thus furnishing mankind with the two noblest of things, which are sweetness and light*».

(*Vértice,* Fasc. 6, N.$^{os}$ 27 a 30, Março de 1946)

---

Nota: Os máximos e os mínimos da figura 2 devem considerar-se pontos de abcissas iguais às respectivas ordenadas.